1

Diferansiyel Denklemler

İçinde türev alınmış fonksiyon varsa o denklem diferansiyel denklemdir.

$$y' - 3xy = 4 \qquad y' \Rightarrow \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{3\,dy}{dx} + 4xy = e^{x+1}$$

$$\rightarrow y'' + 3y' + 4xy = e^{x+1}$$

* Amaç türevi alınmış fonksiyonun ne olduğunu bulmaktır.

Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

- Adi Diferansiyel, Kısmi Diferansiyel
- Diferansiyelin derecesi (mertebesi)
- Lineerlik, homojenlik

Sürekli farklı parametrelerin olduğu evrende çözümleri ifade edebilmek için cebirsel ifadeler yerine diferansiyel denklemler kullanılır.

Adi Dif Denklem: Yalnız bir bağımsız değişkene göre türevlerini içeren dif denklemdir.

$$\frac{dy}{dx} = y' \qquad y' - 3xy = 2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' \qquad y'' - 3y' - 4y = 0$$

} Adi dif örnekleri

$$\frac{dy}{dx} = 4$$

Dif Denklemin Derecesi:

Mertebe = Dif denklemde yer alan en yüksek mertebeli türevdir.

Derece = En yüksek mertebeli terimin kuvveti

★★ NOT: Türev ln, sin, cos, e ... gibi fonksiyonlara uygulanmışsa o denklemin derecesi yoktur.

$y'' - 3x(y')^2 + y^2 = 0$ m:2 D:1

$(y'')^3 + 2(y')^5 + 4 = 0$ m:2 D:3

$yy' - 3xy + x^2 = 0$ m:1 D:1

$xy''' - 3y'' + 2y' + 5xy = 0$ m:3 D:1

②

Lineerlik: Dif denklemdeki bağımlı değişken ve tüm türevler birinci dereceden ise lineerdir. İçerisinde $y^3, (y'')^2, yy', y'y^n, \sin y, e^y$ gibi terim bulunanlar Lineer değildir. y veya y'' lü ifadelerin üssü alınırsa Lineerlik bozulur. Veya y'ler çarpım durumundaysa yine lineerlik bozulur.

Homojenlik: Bütün y'liler bir tarafa toplandığında eşitliğin karşısı "0" ise homojendir.

$y''-3y'-4y=0$ Homojen

$y'-4xy=0$ Homojen

$x^3y''-4e^xy'-5xy=0$ Homojen

$y''-3y'-4=0$ Homojen DEĞİL

$y'-4xy=e^x$ Homojen DEĞİL

Dif Denklemde Çözüm Kavramı

Genel Çözüm: Bir diferansiyel denklemi sağlayan ve içerisinde denklemin mertebesi kadar keyfi sabit (parametre) içeren denklemdir

Özel Çözüm: Genel çözümdeki parametrelere özel değerler vererek elde edilen çözümlerdir

Aykırı (Tekil) Çözüm: Bazı diflerin genel çözümünden elde edilemeyen fakat denklemi sağlayan çözümlerdir

İlkelden Dif Elde Etme

Verilen ifadelerde türev yoktur, x ve y vardır. Yani ilkeldir. Ne kadar parametre varsa $(c_1, c_2, ---)$ o kadar türev alının Buradaki amacım türev alıp parametreleri yok etmek. Sonuç olarak parametre sayısınca mertebeli dif denklem elde edilecek

Ö/ $x^2+y^2=r^2$ çember ailesinin dif denklemini bul.

1 adet parametre var (r) 1 kez türev alıcaz

x bağımsız olsun

$x^2+y(x)^2=r^2$

1. türev

$2x+2y(x)\cdot y(x)'=0$

$x+y(x)\cdot y(x)'=0$

$x+y\cdot y'=0$ $\boxed{y'=\frac{-x}{y}}$

① Ö/ $(x-c)^2+y^2=1$ denkleme ait difi bulun

1 adet parametre var 1kez türev alınır

x bağımsız olsun

$(x-c)^2+y(x)^2=1$

$2(x-c)+2y(x)\cdot y'(x)=0$

$(x-c)+y(x)\cdot y'(x)=0$

Ana denklemde $(x-c)$ yerine $-yy'$ yazarsak;

$\boxed{(-yy')^2+y^2=1}$ difini buluruz

parametreleri yok ettim ve elde denklemde türev var.

Cevap budur

Çalışma Soruları

Ö/ $y=\sin 2x+\cos 2x$ fonksiyonu $y''+4y=0$ diferansiyelinin çözümü müdür?

2kez türev alıcaz

$y'=2\cos 2x-2\sin 2x$

$y''=-4\sin 2x-4\cos 2x$

denklemde yerine yaz

$-4\sin 2x-4\cos 2x+4\overbrace{(\sin 2x+\cos 2x)}^{y}=0$ sağlar ✓ çözümüdür

$0=0$

Ö/ $y=e^x+e^{-x}$ fonksiyonu $y''-2y=0$ " " " "

2 kez türev alıcaz

$y'=e^x-e^{-x}$

$y''=e^x+e^x$

yerine yazalım

$\overset{y''}{(e^x+e^{-x})}-(2\overbrace{(e^x+e^{-x})}^{y}=0$

$e^x+e^{-x}-2e^x-2e^{-x}$

$-e^x\neq e^{-x}$ sağlamaz, çözümü değildir

Ö/ $y=c_1e^x+c_2e^{2x}$ fonksiyonu $y''-3y'+2y=0$ diferansiyelinin genel çözümü müdür?

2 kez türev alıcaz

$y'=c_1e^x+2c_2e^{2x}$

$y''=c_1e^x+4c_2e^{2x}$

yerine yaz

$(c_1e^x+4c_2e^{2x})-3(c_1e^x+2c_2e^{2x})+2c_1e^x+2c_2e^{2x}=0$

$0=0$ sağlar ✓ denklemin genel çözümüdür.

Ö/ $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}$ fonksiyonu $y'''-y=0$ diferansiyelinin genel çözümü müdür?

3kez türev alıcaz

$y'=c_1e^x-c_2e^{-x}+2c_3e^{2x}$

$y''=c_1e^x+c_2e^{-x}+4c_3e^{2x}$

$y'''=c_1e^x-c_2e^{-x}+8c_3e^{2x}$

yerine yaz

$(c_1e^x-c_2e^{-x}+8c_3e^{2x})-(c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{2x})$

$\Rightarrow -2c_2e^{-x}+7c_3e^{2x}$ sağlamaz X çözümü değildir

Ö/ $y=c_1\sin x+c_2$ fonksiyonu $y'-y=\sin x$ diferansiyel denkleminin genel çözümü müdür?

1kez türev alıcaz

$y'=c_1\cdot\cos x$

yerine yaz

$c_1\cos x-c_1\sin x-c_2=\sin x$

X sağlamaz, çözümü değildir

③ $(x-c)^2+y^2=1$ denkleminin difini bulunuz.
x bağımsız olsun, 1 adet türev alıcaz

$2(x-c)+2(y(x)\cdot y(x))'=0$

$(x-c)+y\cdot y'=0$

Parametreyi yok edemedim, o halde yerine yazma, çarpma, bölme gibi işlemler kullanıcam

$x-c=-yy'$

$(x-c)$ yerine $-yy'$ yazarsam asıl denklemden bir dif elde ederim

$\boxed{(-yy')^2+y^2=1}$ Dif denklemini elde ederim

ö/ $y=\sin 2x+\cos 2x$ fonksiyonu $y''+4y=0$ difinin çözümü müdür?

Verilen dif 2. mertebeden olduğu için denklemi 2 kez türev alıcam

Türevli denklemi elde edince yerine yazıp eşleşiyor mu diye bakıcam

$y'=2\cos 2x-2\sin 2x$

$$\underbrace{y''=-4\sin 2x-4\cos 2x}_{\text{denklemde yerine yaz}}$$

$y''+4y=0$

$\underbrace{(-4\sin 2x-4\cos 2x)}_{y''}+4\underbrace{(\sin 2x+\cos 2x)}_{y}=0$

$0=0$ ✓ Sağlar

ö/ $y=e^x+e^{-x}$ fonksiyonu $y''-2y=0$ diferansiyelinin çözümü müdür?

$y'=e^x-e^{-x}$

$y''=e^x+e^{-x}$

$(e^x+e^{-x})-2(e^x+e^{-x})$

$\Rightarrow e^x+e^{-x}-2e^x-2e^{-x}$

$\Rightarrow -e^x-e^{-x}$ $\boxed{\text{sağlamaz}}$ X

ö/ $y=c_1e^x+c_2e^{2x}$ fonksiyonu ~~$y'''-y=0$~~ difinin genel çözümü müdür?

$y''-3y'+2y=0$

$y'=c_1e^x+2c_2e^{2x}$

$y''=c_1e^x+2\cdot 2c_2e^{2x}$

$=c_1e^x+4c_2e^{2x}$
yerine yaz

$y''-3y'+2y=0$

$(c_1e^x+4c_2e^{2x})-3(c_1e^x+2c_2e^{2x})+2c_1e^x+2c_2e^{2x}$

$0=0$ sağlar ✓ genel çözümüdür, difi sağlar ve içinde dif mertebesi kadar parametre içerir

ö/ $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}$ fonksiyonu $y'''-y=0$ difinin genel çözümü müdür?

$y'=c_1e^x-c_2e^{-x}+2c_3e^{2x}$

$y''=c_1e^x+c_2e^{-x}+4c_3e^{2x}$

$y'''=c_1e^x-c_2e^{-x}+8c_3e^{2x}$

$(c_1e^x-c_2e^{-x}+8c_3e^{2x})-c_1e^x-c_2e^{-x}-c_3e^{2x}=0$

$\boxed{\text{sağlamaz X}}$

⑥ $y = c_1 \sin x + c_2$ fonksiyonu $y' - y = \sin x$ dif'inin genel çözümü müdür?

$y' = c_1 \cdot \cos x$

$(c_1 \cdot \cos x) - (c_1 \sin x + c_2) = \sin x$

sağlamaz ✗

Ö/ $x^2 + y^2 = c$ genel çözümüne karşılık gelen dif'i bul

x bağımsız olsun

parametre kadar türev alırım, eğer parametreleri yok edebilicsem sonuç dif'imi bulurum, parametreler yok olmaz ise çarp, böl, yerine yaz vs. yaparak yok ederim

$x^2 + y(x)^2 = c$

S1: x'e göre türev al

$2x + 2y(x) \cdot y(x)' = 0$

Parametre yok sonuç bu

$\boxed{2x + 2yy' = 0}$

Ö/ $y = ce^{2x}$ genel çözümüne karşılık gelen dif'i bul.

x bağımsız olsun $y = y(x)$ olacak.

$\Rightarrow y(x) = ce^{2x}$

$y'(x) = 2ce^{2x}$ → Halen parametre var. O zaman 3. adıma geçilir

$y(x) = ce^{2x}$

$y'(x) = 2ce^{2x}$

$y'(x) = 2y(x)$ elde edilir

$\boxed{y' = 2y}$

ö/ $y = \sin(x + c)$ genel çözümüne karşılık gelen dif'i bulunuz.

x bağımsız olsun

$y(x) = \sin(x + c)$ 1 kere türev al

$y'(x) = \cos(x + c)$

Parametre yok olmadı, elde ettiğim sonuçlar arasında ilişki kurayım

$(y'(x))^2 + (y(x))^2 = 1$

$\boxed{(y')^2 + y^2 = 1}$

ö/ $y = c_1 x + c_2$ genel çözümüne karşılık gelen dif'i bul

2 kez türev alıcam

x bağımsız olsun

$\boxed{y'' = 0}$

$y(x) = c_1 x + c_2$

$y'(x) = c_1$

$y''(x) = 0$ → elde edilen son türevde parametre yok aradığım cevap bu

ö/ $y = c_1 \sin 2x + \cos 2x \cdot c_2$ genel çözümüne karşılık gelen dif'i bulunuz.

x bağımsız değişken olsun. 2 kez türev alıcam

$y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$

$y'(x) = 2c_1 \cos 2x \mp 2c_2 \sin 2x$

$y''(x) = -4c_1 \sin 2x - 4c_2 \cos 2x$

Halen elimde parametre var

3. adıma geçilir → soldaki ifadelerde çarp böl yaparak

$\boxed{y'' = -4y \text{ veya } y'' + 4y = 0}$ elde ediyorum

7) $(x-c_1)^2 + y^2 = c_2$ genel çözümüne karşılık gelen dif. bulunuz.
x bağımsız değişken olsun

$\Rightarrow (x-c_1)^2 + y(x)^2 = c_2$

1. türev $2(x-c_1) + 2y(x)\, y'(x) = 0$

$(x-c_1) + y(x)\, y'(x) = 0$

2. türev $1 + \underbrace{y'(x)\, y'(x) + y''(x)\, y(x)}_{\text{çarpım türevi}} = 0$

son türevde elimde parametre kalmadı
o halde cevap:

$$\boxed{1 + (y')^2 + y''y = 0}$$

8) $\ln y = c_1 x + c_2$ genel çözümüne karşılık gelen dif. bulunuz.
y bağımsız olsun

$\ln y = c_1 x(y) + c_2$ y'ye göre 2 defa türev alınacak

$\frac{1}{y} = c_1 x'(y)$

$\frac{-1}{y^2} = c_1 x''(y)$

Halen parametre var

$\frac{3.\text{denklem}}{2.\text{denklem}} = \frac{x''(y)}{x'(y)} = \frac{-1}{y}$

$\Rightarrow \boxed{y x'' + x' = 0}$

Çalışma Soruları

NOT: Genel çözümden dif bulunurken;
x bağımsız ise y yerine $y(x)$
y bağımsız ise x yerine $x(y)$ yazılır. işimiz bitince $y(x)$ y, $x(y)$ x dur ve biter

S/ $x^3 + y^4 = c$ genel çözümüne karşılık gelen dif. bulunuz.
x bağımsız olsun 1 kez türev alıcam

$x^3 + y(x)^4 = c$

$3x^2 + 4y(x)\cdot y'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 4yy' = 0$

parametreyi yok ettim sonuç bu dur

S/ $x^3 e^x + \ln y \cdot y^4 = c$ genel çözümüne karşılık gelen dif. bulunuz
y bağımsız olsun 1 kez türev alıcam

$x(y)^3 e^x + \ln y\, y^4 = c$

1. türev $3x(y)^2 \cdot x'(y) \cdot e^x + e^x \cdot x(y)^3 + y^3 = 0$

$\Rightarrow \boxed{3x^2 \cdot x' \cdot e^x + e^x \cdot x^3 + y^3 = 0}$

⑧ Ö/ $\ln y = e^{(x+c)}$ genel çözümüne karşılık gelen dif'i bulunuz.

y bağımsız olsun

Ö/ $y = c_1 \sin 4x + c_2 \cos 4x$ genel çözümüne karşılık gelen dif'i bulunuz

x bağımsız olsun 2 kez türev alıcam

$y'(x) = 4c_1 \cos 4x - 4c_2 \sin 4x$

y'' denklemi y'nin -16 katı

$y''(x) = -16c_1 \sin 4x - 16c_2 \cos 4x$

parametreleri yok edemedim

elde ettiğim denklemler arasında

ilişki kurmalıyım

$$\boxed{y'' = -16y}$$

Ö/ $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$ genel çözümüne karşılık gelen dif'i bulunuz.

x bağımsız olsun 2 kez türev alıcam

$y'(x) = -c_1 e^{-x} + 3c_2 e^{3x}$

$y''(x) = c_1 e^{-x} + 9c_2 e^{3x}$

$$\boxed{y'' = 3y + 2y'}$$

Ö/ $\cos y = c_1 x^2 + c_2$ genel çözümüne karşılık gelen dif'i bulunuz.

Ö/ $x^2 + (y - c_1)^2 = c_2$ genel çözümüne karşılık gelen dif'i bulunuz.

y bağımsız olsun 2 kez türev alıcaz

$x(y)^2 + (y - c_1)^2 = c_2$

$$\boxed{(x')^2 + x'' \cdot x + 1 = 0}$$

Türev

$\cancel{2} x(y) \cdot x'(y) + \cancel{2}(y - c_1) = 0$

Türev çarpım türevi

$x'(y) \cdot x'(y) + x''(y) \cdot x(y) + 1 = 0$

(9)

Birinci Mertebeden Difler

$f(x,y,y')$ şeklinde gösterilir. x bağımsız değişken ve y', y fonksiyonunun x değişkenine göre birinci türevi olmak üzere $f(x,y,y')=0$ genel gösterimine sahiptir.

$y' = \frac{dy}{dx}$ şeklinde yazılarak düzenlendiğinde $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ şeklinde dif notasyonu ile gösterilir

$f(x,y,y')=0$ türev notasyonlu

$P(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ dif notasyonlu

$y = g(x) + c$ açık çözüm

$g(x,y,c)=0$ kapalı çözüm

Değişkenlerine Ayrılabilen Diferansiyeller: Birinci mertebeden dif denklem dönüştürüldüğünde $g(y)\,dy = f(x)\,dx$ gibi yazılabiliyorsa D.A.D.D olur dif formuna dönüştürüldüğünde değişkenine, dx difinin

Burada istenilen biçim, dy difinin katsayısı sadece y değişkenine, dx difinin katsayısı sadece x değişkenine bağlı olmasıdır.

Genel çözümü bulmak için her tarafın integrali alınır.

Bazı difler değişkenlerine ayrılmaz, bazıları ayrılır işlem yapmamız gerekir. Bazıları ayrılır ama böl, çarp gibi işlem yapmamız gerekir.

ö/ $\frac{1}{1+y^2}\,dy + x^3\,dx = 0$ Diferansiyelinin genel çözümünü bulunuz.

S1: Değişkenlerine ayrılmıştır, o halde her tarafın integralini alalım.

$\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \arctan y + c$ $\qquad \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + c$

$$\boxed{\arctan y + \frac{x^4}{4} = c}$$

ö/ $\frac{dy}{dx} = (x-2)^2(y-3)$ Diferansiyelinin genel çözümünü bulunuz.

S1: Değişkenlerine ayrılmamış. Her tarafı $\frac{dx}{y-3}$'e böldüm

$\frac{dy}{y-3} = (x-2)^2\,dx$ Şimdi değişkenlerine ayrıldı ✓

S2: integral al $\int \frac{dy}{y-3} = \ln|y-3| + c$ $\qquad \int (x-2)^2\,dx = \frac{(x-2)^3}{3} + c$

Genel çözüm

$$\boxed{\ln|y-3| = \frac{(x-2)^3}{3} + C}$$

10)

a/ $xy^3dx + (y+1)e^{-x}dy = 0$

S1: Denklem değişkenlerine ayrılmamış.

Her tarafı $\frac{e^x}{y^3}$ ile çarpalım

$$xe^x dx + \frac{(y+1)}{y^3}dy = 0 \quad y \neq 0 \text{ için}$$

Genel Çözüm

$$\boxed{(x-1)e^x = \frac{1}{y} + \frac{1}{2y^2} + C}$$

S2: Değişkenlerine ayırdık, integral alalım

$$\int x e^x dx \qquad \int \frac{y+1}{y^3}dy$$

$$\Rightarrow (x-1)e^x + C \qquad \Rightarrow \int (y^{-2}+y^{-3})dy$$

$$x = u \quad du = e^x dx \qquad \Rightarrow \frac{-1}{y} - \frac{1}{2y^2} + C$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

b/ $x(2y+1)dx + (x^2-4)dy = 0$

S1: Değişkenlerine ayrılmamış. Her tarafı

$\frac{1}{(2y+1)(x^2-4)}$ ile çarpalım

$$\Rightarrow \frac{x}{x^2-4}dx + \frac{1}{2y+1}dy = 0$$

S2: Değişkenlerine ayrıldı, integral al

$$\int \frac{x}{x^2-4}dx = \int \frac{x}{(x-2)(x+2)}dx = \int \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}dx$$

$$= \int \frac{1/2}{(x-2)} + \frac{1/2}{(x+2)}dx \Rightarrow \frac{1}{2}\left[\ln|x-2| + \ln|x+2|\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln|x^2-4| + C$$

$$\int \frac{1}{2y+1}dy = \frac{1}{2}\int \frac{1 \cdot 2}{2y+1}dy = \frac{1}{2}\ln|2y+1| + C$$

c/ $y' + y^2 = 9 \quad y(0) = 0$ başlangıç değer problemini çözünüz.

$$\frac{dy}{dx} = 9 - y^2 \Rightarrow \frac{dy}{9-y^2} = dx \quad \text{Değişkenlerine ayırdık}$$

S2: integral al

$$\star \int \frac{dy}{a^2-y^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+a}{y-a}\right| + C \qquad \int \frac{dy}{9-y^2} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{y+3}{y-3}\right| + C = \int dx = x + C$$

y(0)=0 x yerine 0, y yerine 0 yazıp c'yi bulalım

$$\frac{1}{6}\ln\left|\frac{0+3}{0-3}\right| = 0 + C \qquad \boxed{C = 0}$$

Genel Çözüm

$$\boxed{\frac{1}{6}\ln\left|\frac{y+3}{y-3}\right| = x}$$

d/ $y' = x + y$ denklemi değişkenlerine ayrılabilir mi?

$$\frac{dy}{dx} = x + y \Rightarrow (x+y)dx = dy$$

Bu denklemi neyle çarparsan çarp değişkenlerine ayıramazsın

(11)

Hoca dif denklemin çözümünü isteyebilir, fakat dif değişkenlerine ayrılmayabilir. Buraya dikkat, tuzak olabilir

Çalışma Soruları

Ö/ $x(y^2-1)dx - y(x^2-1)\,dy = 0$ Dif değişkenlerine ayrılır mı? Ayrılırsa genel çözümü bul

S1: Değişkenlerine Ayrılmamış, Her tarafı $\frac{1}{(y^2-1)(x^2-1)}$ ile çarptım.

$$\int \frac{x}{x^2-1}dx = \int \frac{y}{y^2-1}dy$$

S2: integral al

$u = x^2-1$
$du = 2x\,dx$
$\frac{du}{2} = x\,dx$

$$\int \frac{du}{2\cdot u} = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{u}du$$

$= \frac{1}{2}\cdot \ln|u|$

$\Rightarrow \frac{\ln|x^2-1|}{2}$

y'dende aynısı gelcek

$$\boxed{\frac{\ln|x^2-1|}{2} = \frac{\ln|y^2-1|}{2} + C}$$

Ö/ $x^2y' = y - xy$ $\quad y(-1)=1$ başlangıç değer problemini çözünüz

S1: Değişkenlerine ayrılmamış, y'i açalım

$x^2\frac{dy}{dx} = y(1-x)$

$= \frac{dy}{y} = \frac{(1-x)}{x^2}dx$

$\int\frac{1}{y}dy = \ln|y|$

$\int\frac{(1-x)}{x^2} = \int\frac{1}{x^2}dx - \int\frac{1}{x}dx$

S2: integral al

$\Rightarrow \left(\frac{-1}{x}\right) - (\ln|x|)$

$\ln|y| = -\ln|x| - \frac{1}{x} + C$

$y(-1)=1$

$\ln|1| = -\ln|1| + 1 + C$

$2\underbrace{\ln|1|}_{0} = 1 + C$

$0 = 1 + C$

$\boxed{C=-1}$ yerine yaz

Bulunan c genel çözümde yerine yazılır ve başlangıç değer probleminin çözümü bulunur

Genel Çözüm

$$\boxed{\ln|y| = -\ln|x| - \frac{1}{x} - 1}$$

Ö/ $y^2dx + (x+1)dy = 0$ $\quad y(0)=1$

S1: Her tarafı $\frac{1}{y^2\cdot(x+1)}$ ile çarpalım

$$\frac{dx}{x+1} + \frac{dy}{y^2} = 0$$

S2: Değişkenlerine ayrıldı, integral al

$$\int\frac{dx}{x+1} + \int\frac{dy}{y^2} = 0$$

$\ln|x+1| + \left(-\frac{1}{y}\right) + C = 0$

$y(0)=1$

$\underbrace{\ln|1+0|}_{0} + \left(\frac{-1}{1}\right) + C = 0$

$0 - 1 + C = 0$ $\quad C=1$

$$\boxed{\ln|x+1| - \frac{1}{y} + 1 = 0}$$

genel çözüm

12) $y' = e^{x+y}$ değişkenlerine ayrılır mı? Ayrılırsa genel çözümü bulunuz

$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^y$ $\int \frac{dy}{e^y} = \frac{-1}{e^y}$

$\frac{dy}{e^y} = e^x dx$ $\int e^x dx = e^x + C$

$\boxed{\frac{-1}{e^y} = e^x + C}$ genel çözüm

Ö/ $2xyy' - 1 - y^2 = 0$ " " " " "

$2xy\frac{dy}{dx} = y^2+1$ Her tarafı y ile çarp

$\frac{dy}{y^2+1} = \frac{dx}{2xy}$

$\frac{y}{y^2+1}dy = \frac{dx}{2x}$

S2: integral al

$\int \frac{y}{y^2+1}dy = \int \frac{\frac{du}{2}}{u} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \cdot \ln|y^2+1|$

$u = y^2+1$

$du = 2y$

$\boxed{\frac{du}{2} = y}$

$\int \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \cdot \ln|x|$

$\boxed{\frac{1}{2}\ln|y^2+1| = \frac{1}{2}\ln|x| + C}$

Tam Diferansiyel Denklemler

$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$

Denklem değişkenlerine ayrılmıyorsa ve $P_y = Q_x$ eşitliği varsa denklem tam diferansiyel adını alır. P'nin y'le göre türevi Q'nun x'le göre türevine eşitse tam diferansiyel adını alır. Çözüm varlığı hayal edilir.

Tam dif çözümü için $U(x,y) = C$ gibi bir çözüm varlığı hayal edilir.

Çözüm bu iki şartı sağlar

$U_x = P$ $U_y = Q$

↓ ↓

U'nun x'le göre türevi U'nun y'le göre türevi

! dx'li kısıma $P(x)$ dy'li kısıma $Q(x)$ deriz

Ö/ $\underbrace{xy^2}_{P}dx + \underbrace{x^2y}_{Q}dy = 0$

S1: Değişkenlerine ayrılır mı? Hayır

S2: $P_y \overset{?}{=} Q_x$

$P_y = 2xy$ $Q_x = 2xy$

eşit ✓

y değişken, x katsayı gibi düşün

x değişken, y katsayı gibi düşün

S3: $U(x,y) = C$ hayal et

$U_x = P = xy^2$

$= \int_x (xy^2)\,dx$

$= \frac{x^2y^2}{2} + h(y)$

Burada değişik sebeplerden ötürü $h(y)$ eklenir. Sonra elde ettiğini y'le göre türev al $Q(x)$'e eşitle $h(y)$'i bul. Genel çözümü elde et

$\frac{x^2y^2}{2} + h(y) = Q(x)$

y'le göre türev

$\frac{x^2 2y}{2} + h'(y) = x^2y$

$x^2y + h'(y) = x^2y$

$h'(y) = 0$

$h(y) = C$

$\boxed{U = \frac{x^2y^2}{2} + C}$

(13) $\underbrace{(6x^2+4xy+y^2)}_{P}dx + \underbrace{(2x^2+2xy-3y^2)}_{Q}dy=0$

S1: Değişkenlerine ayrılmaz.

S2: $P_y \overset{?}{=} Q_x$ Tamlık var mı?

$P_y = 4x+2y \quad Q_x = 4x+2y$

eşit ✓

S3: $U(x,y)=c$ hayalet

$$U = \int_x (6x^2+4xy+y^2)\,dx$$

$$= \frac{6x^3}{3} + \frac{4x^2y}{2} + y^2x + h(y)$$

$$= 2x^3 + 2yx^2 + y^2x + h(y)$$

S4: eldenin y'le göre türevini al Q(x)'le eşitle h(y)'i bul

$$0 + 2x^2 + 2xy + h'(y) = \overbrace{2x^2+2xy-3y^2}^{Q(x)}$$

$$h'(y) = -3y^2$$

$$h(y) = \int_y -3y^2$$

$$h(y) = -\cancel{3}\frac{y^3}{\cancel{3}}$$

$$h(y) = -y^3$$

$$\boxed{U = 2x^3+2x^2y+y^2x+(-y^3)}$$

Ö/ $\underbrace{(y\cdot\cos x + 2xe^y)}_{P} + \underbrace{(\sin x + x^2e^y - 1)}_{Q}y' = 0$

$\frac{dy}{dx}$ yazıp ayırdım sol P sağ Q oldu

S1: Değişkenlerine ayrılmaz

S2: $P_y \overset{?}{=} Q_x$ Tamlık var mı?

$P_y = \cos x + 2xe^y$

$Q_x = \cos x + 2xe^y$ var ✓

S3: $U(x,y)=c$ hayalet

$$U = \int_x (y\cos x + 2xe^y)\,dx$$

$$= y\sin x + 2e^y\cdot\frac{x^2}{2} + h(y)$$

S4: Bu ifadenin y'le göre türevini al Q'ya eşitle

$$U_y = \cancel{\sin x} + \cancel{e^yx^2} + h'(y) = \cancel{\sin x} + \cancel{x^2e^y} - 1$$

$$h'(y) = -1$$

$$\boxed{h(y) = -y}$$

$$\boxed{U(x,y) = y\sin x + e^yx^2 + -y}$$

Ö/ $\underbrace{(\cos x\cdot\cos y + 2x)}_{P}dx - \underbrace{(\sin x\cdot\sin y + 2y)}_{Q}dy = 0$ dif'in genel çözümünü bulunuz

$P_y \overset{?}{=} Q_x$

$P_y = \underset{\text{katsayı}}{\cos x}\cdot(-\sin y)$

$Q_x = \sin y\cdot(-\cos x)$

eşit ✓

$U(x,y)=c$

$$U_x = \int_x (\cos x\cos y + 2x)\,dx$$

$$= \sin x\cos y + \frac{2x^2}{2}$$

$$= \sin x\cos y + x^2 + h(y)$$

y'le göre türev al Q'la eşitle

$$\cancel{-\sin y\sin x} + h'(y) = \cancel{-\sin x\sin y} - 2y$$

$$h'(y) = -2y$$

$$h(y) = \frac{-2y^2}{2}$$

$$\boxed{h(y) = -y^2}$$

$$\boxed{U = \sin x\cos y + x^2 - y^2}$$

(14)

ör $(3x^2y+2xy)dx+(x^3+x^2+2y)dy=0$ d.f.nin genel çözümünü bulun

S1: Değişkenlerine ayrılmaz

S2: $P_y = Q_x$ Tamlık var mı?

$P_y = 3x^2+2x$
$Q_x = 3x^2+2x$ eşit ✓

S3: $U(x,y)=c$ hayalet

$$U_x = \int_x P(x)$$

$$= \int_x (3x^2y+2xy)dx$$

$$= \frac{\cancel{3}x^3y}{\cancel{3}} + \frac{2x^2y}{2}$$

$$\Rightarrow x^3y + x^2y + h(y)$$

S4: y'ye göre türev al Q'la eşitle

$$\cancel{x^3}+\cancel{x^2}+h'(y) = \cancel{x^3}+\cancel{x^2}+2y$$

$$h'(y)=2y$$

$$h(y)=\frac{2y^2}{2}$$

$$\boxed{h(y)=y^2}$$

$$\boxed{U = x^3y + x^2y + y^2}$$

Çalışma Soruları

ör $(2x+y)dx+(x-2y)dy=0$ denkleminin tam olduğunu göstererek genel çözümü bul

Artık ilk adımı geçiyorum 😊

S1: $P_y \stackrel{?}{=} Q_x$ ✓
$1=1$

S2: $U(x,y)=C$

$$U_x = \int_x 2x+y$$

$$= \frac{2x^2}{2}+xy$$

$$= x^2+xy+h(y)$$

S3: y'ye göre ~~...~~ türev al

$$x+h'(y) = x-2y$$

$$h'(y)=-2y$$

$$h(y)=\frac{-2y^2}{2}$$

$$h(y)=-y^2$$

$$\boxed{U = x^2+xy-y^2}$$

" " " " " " "

ör $\underbrace{\frac{x}{y}}_{Q}dy+\underbrace{(1+\ln y)}_{P}dx=0$

Burda tuzak var, P her zaman solda olmayabilir, dx'li kısım P olucak dedik, soldaki $\frac{x}{y}$'e P desen patlarsın

S1 $P_y \stackrel{?}{=} Q_x$

$P_y=\frac{1}{y}$
$Q_x=\frac{1}{y}$ eşit ✓

S2 $U(x,y)=C$

$$U_x = \int (1+\ln y)dx$$

$$= x + x\cdot\ln y + h(y)$$

S3: y'ye göre türev al Q'la eşitle

$$x\cdot\frac{1}{y}+h'(y)=\frac{x}{y}$$

$$h'(y)=0$$

$$h(y)=C$$

$$\boxed{U = x + x\ln y + C}$$

(15) $\underbrace{(2x+y+1)}_{P}dx + (\underbrace{x+3y+2}_{Q})dy = 0$ $y(0)=0$ başlangıç değer problemini çöz

S1: $P_y \overset{?}{=} Q_x$

$0 = 0$ ✓ eşit

S2: $U(x,y) = c$ hayalet

$U_x = \int_x (2x+y+1)dx$

$= \frac{2x^2}{2} + xy + x + h(y)$

$= x^2 + xy + x + h(y)$

S4: y'ye göre türev al Q'la eşitle

$x + h'(y) = x + 3y + 2$

$\int h'(y) = \int 3y + 2$

$h(y) = \frac{3y^2}{2} + 2y$

$U = x^2 + xy + x + \frac{3y^2}{2} + 2y = c$

$x=0$ $y=0$ için c olsun

ö $\left(x + \frac{y^2}{2x^2}\right)dx - \frac{y}{x} = dy = 0$ tam olduğunu göstererek genel çözümü bul

$\left(\frac{y}{x}\right)' = y \cdot x^{-1}$

$= -1 \cdot y \cdot x^{-2}$

$= \frac{-y}{x^2}$

S1 $P_y = Q_x$

$\frac{2y}{2x^2} = \frac{y}{x^2}$ ✓

S2 $U(x,y) = c$ hayalet

$U_x = \int x + \frac{y^2}{2x^2} dx$

$= \frac{x^2}{2} + \left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{y^2}{x}\right) + h(y)$

S3 y'ye göre türev al Q'ya eşitle h'ı bul

$\frac{x^2}{2} + \left(\frac{-y^2}{2x}\right) + h(y)$

$\Rightarrow \frac{2y}{2x} + h'(y) = \frac{y}{x}$

$h'(y) = 0$

$\boxed{h(y) = c}$

Tamlık Sağlanmazsa

Tamlık sağlanmazsa denklem bir şeylerle çarpılır, bölünür ve yine tekrardan tamlık sorgusu yapılır. Bu işlemleri yapmak için diferansiyel 1. mertebeden olmalı.

Tam hale getirme:

Eğer $Pdx + Qdy = 0$ dif denkleminde $P_y = Q_x$ tamlık şartı mevcut değilse şu iki eşitliğe bakılır.

① Eğer $\boxed{\dfrac{P_y - Q_x}{Q}}$ ifadesi sadece x'le bağlıysa integral çarpımı elde ederiz ve bu eldeyi elimizde bulunan dif ile çarparsak tamlık artık KESİN sağlanır.

integral çarpımı $\boxed{\lambda = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q} dx}}$ 'dir. Bu integral çarpımını dif ile çarpacağız.

② Eğer $\boxed{\dfrac{P_y - Q_x}{-P}}$ ifadesi sadece y'le bağlıysa elde ettiğimiz λ ifadesini dif ile çarpar ve tamlık elde ederiz

Bu işlemlerden sonra tamlık eğer işlemleri doğru yaptıysanız kesin olacaktır ve yine denklemi tam diferansiyel denklemler çözümünden elde edeceğiz.

Eğer iki koşulda sağlanmazsa denklem tamlıktan çözülmez ve sonraki sayfalarda anlatacağım yöntemlerden çözülür.

Ö/ $(x^2+y^2+x)dx + (xy)dy = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

S1: Değişkenlerine ayrılmaz

S2: Tamlık kontrolü

$P_y \stackrel{?}{=} Q_x$ X

$2y \neq y$

S3: Tam hale getirmeye çalış. Önce 1. şarta bakalım olmazsa 2'ye bakarız

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{2y-y}{xy} = \frac{y}{xy} = \boxed{\frac{1}{x}}$$

Sonuç sadece x'le bağlı. O halde koşul sağlanır, λ 'yı bulup denklemle çarpıp tamlıktan çözeceğiz.

$$\lambda = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q}} = e^{\int \frac{1}{x} dx}$$

$$\lambda = e^{\ln x} \Rightarrow x^{\ln e} \Rightarrow x$$

$\boxed{\ln e = 1 \quad a^{\log_a x} \Rightarrow x^{\log_a a}}$ ☆

S4: Denklemi λ ile çarpalım

$$\underbrace{(x^3 + xy^2 + x^2)}_{P} dx + \underbrace{(x^2 y)}_{Q} dy = 0$$

S5: Tamlık kontrolü

$P_y \stackrel{?}{=} Q_x$ V

$2xy = 2xy$

S6: $U(x,y) = c$ hayal et

$$U_x = \int_x P(x) dx$$

$$U_x = \int_x (x^3 + xy^2 + x^2) dx$$

$$U_x = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{x^3}{3} + h(y)$$

S7: U_x'in y'ye göre türevini al Q'ya eşitle

$$0 + \frac{2yx^2}{2} + 0 + h'(y) = x^2 y$$

$$h'(y) = 0$$

$$\boxed{h(y) = c}$$

S8: $h(y)$'i yerine yaz genel çözümü bul

$$\boxed{U = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{x^3}{3} + c}$$

(17) $\underbrace{(3y-2x)}_{P}dx + \underbrace{x}_{Q}dy = 0$ denklemini tam hale getirerek genel çözümünü bulunuz.

S1: Değişkenlerine ayrılmaz

S2: Tamlık var mı?

$P_y \overset{?}{=} Q_x$ ×

$3 = 1$

S3: Tam hale getirme

1. Kural

$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{2}{x}$ ✓

1. Kural sadece x'e bağlı

S4: $\lambda = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q}}$

$\lambda = e^{\int \frac{2}{x}} = e^{2\ln x}$

$\lambda = x^{2\ln e}$

$\boxed{\lambda = x^2}$

S5: Denklemi λ ile çarp

$(3x^2y - 2x^3)dx + (x^3)dy = 0$

S6: $U(x,y) = c$ hayal et

$U_x = \int_x (3x^2y - 2x^3)dx$

$= \frac{3x^3y}{3} - \frac{2x^4}{4} + h(y)$

$U \Rightarrow x^3y - \frac{x^4}{2} + h(y)$

S7: U'nun y'ye göre türevini al
Q'ya eşitle

$U_y = x^3 + h'(y) = x^3$

$h'(y) = 0$

$h(y) = c$

$\boxed{U = x^3y - \frac{x^4}{2} + c = 0}$

Ö/ $\underbrace{y^2}_{P}dx + \underbrace{xy}_{Q}dy = 0$ denklemini tam hale getirerek genel çözümünü bulunuz

Artık adım adım açıklama yapmayacağım, anlarsınız diye düşünüyorum

S1 Değişkenlerine ayrılmaz

S2: $P_y \overset{?}{=} Q_x$

$2y \neq y$

S3: $\frac{P_y - Q_x}{Q} \overset{?}{=} g(x)$

$\frac{2y - y}{xy} = \frac{1}{x}$ ✓

S4: $\lambda = e^{\int \frac{1}{x}} = e^{\ln x}$

$\boxed{\lambda = x^{\ln e} = x}$

S5: $(xy^2)dx + (x^2y)dy = 0$

S6: $U(x,y) = c$

$U_x = \int_x (xy^2)dx$

$U = \frac{x^2y^2}{2} + h(y)$

S7: $U_y = Q_x$

$\frac{\cancel{2}x^2y}{\cancel{2}} + h'(y) = x^2y$

$h'(y) = 0$ $\boxed{h(y) = c}$

S8:

$\boxed{U(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + c = 0}$

(18)

a) $\underbrace{(3x^2+3y^2)}_{P}dx + \underbrace{(x^3+3xy^2+6xy)}_{Q}dy = 0$ dif'ini tam hale getirerek çözünüz

S1: Değişkenlerine ayrılamaz.

S2: Tamlık yok

S3: Tam Hale Gelebilir mi?

1. Tam hale getirme kuralını deneyelim olmazsa 2. kurala bakarız. O da olmazsa denklem tamlıktan çözülmez

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{6y-(3x^2+3y^2+6y)}{x^3+3xy^2+6xy}$$

Burdan sonuç elde edemedim

2. sine bakalım

$$\frac{P_y - Q_x}{-P} = \frac{\cancel{6y}-3x^2-3y^2-\cancel{6y}}{-3x^2-3y^2} \Rightarrow 1$$

S4: $\lambda = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{-P}} = e^{\int 1\, dy} = e^y$

$$\boxed{\lambda = e^y}$$

S5: Denklemi λ ile çarp sonra tamlıktan çöz

$$\underbrace{(3x^2e^y+3y^2e^y)}_{P}dx + \underbrace{(x^3e^y+3xy^2e^y+6xye^y)}_{Q}dy = 0$$

S6: $P_y \overset{?}{=} Q_x$

$P_y = 3x^2e^y+6ye^y+3y^2e^y$) eşit

$Q_x = 3x^2e^y+3y^2e^y+6ye^y$

S7: $u(x,y)=c$ hayalet

$$u = \int_x P(x)dx = \int (3x^2e^y+3y^2e^y)dx$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{3}x^3e^y}{\cancel{3}} + \frac{3y^2xe^y}{1} + h(y) =$$

$u \Rightarrow x^3e^y + 3y^2xe^y + h(y)$

S8: U'nun y'ye göre türevini al Q'ya eşitle h'ı bul

$u_y = \cancel{x^3e^y} + \cancel{6yxe^y} + \cancel{3y^2xe^y} + h'(y) = \cancel{x^3e^y} + \cancel{3xy^2e^y} + \cancel{6xye^y}$

$h'(y)=0 \quad h(y)=c$

$$\boxed{u(x,y) = x^3e^y + 3y^2xe^y + c = 0}$$

(19)

Lineer Adi Diferansiyel Denklemler

Bir dif denklem $\boxed{y' + y \cdot P(x) = Q(x)}$ formatında yazılabiliyorsa lineer diferansiyel denklemdir. $\boxed{\lambda = e^{\int P(x)dx}}$ integral çarpımı bulmak kaydıyla genel çözüm;

$$\boxed{y = \frac{1}{\lambda(x)} \left[\int \lambda(x) \cdot Q(x) dx + c \right]}$$ dır

Denklem TAM olarak $y' + y \cdot P(x) = Q(x)$ şeklinde olmalı. Bu hale gelmezse çarp, böl yaparak denklemi istenilen hale getirmeliyiz.

Ö/ $y' - 2xy = x$ difini çözünüz. $\longrightarrow (-2xy - x)dx + 1.dy = 0$

Bu ikisi aynı denklem, y' yerine $\frac{dy}{dx}$ yazıp düzenledim Hoca ters köşe yapabilir

S1: Değişkenlerine ayrılmaz

S2: Tamlık yok

S3: Tam hale getirilemez.

S4: Denklem $y' + y \cdot P(x) = Q(x)$ formatında yani lineerlikten çözülür.

$$\lambda = e^{\int P(x)dx} = e^{\int (-2x)dx}$$

$$\lambda = e^{-x^2}$$

$$y = \frac{1}{e^{-x^2}} \left[\int e^{-x^2} \cdot x \, dx + C \right] \qquad \begin{aligned} -x^2 &= t \\ -2x dx &= dt \\ x dx &= \frac{dt}{-2} \end{aligned}$$

$$y = \frac{1}{e^{-x^2}} \left[\int \frac{-1}{2} \cdot e^t dt \right. =$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e^{-x^2}} \cdot \left[\frac{-1}{2} \cdot \int e^t dt \right.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cancel{e^{-x^2}}} \cdot \left[\frac{-1}{2} \cdot \cancel{e^{-x^2}} + C \right]$$

$$y \Rightarrow \frac{-1}{2} + C$$

20) $\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'} + \underbrace{\left(\frac{2x+1}{x}\right)}_{P(x)} \cdot \underbrace{y}_{y} = \underbrace{e^{-2x}}_{Q(x)}$ d.f.in'in genel çözümünü bulunuz

Tam olarak lineerlikten çözüm şartını sağlıyor

$y = \frac{1}{\lambda(x)}\left[\int \lambda(x) \cdot Q(x)\,dx + c\right]$

$\lambda = e^{\int P(x)dx}$

$\lambda = e^{\int \frac{2x+1}{x}dx} = e^{\int 2+\frac{1}{x}dx}$

$\lambda = e^{2x+\ln x} \Rightarrow e^{2x} \cdot e^{\ln x}$

$e^{\ln x} = x^{\ln e} = x$

$y = \frac{1}{e^{2x} \cdot x}\left[\int (\cancel{e^{2x}} \cdot x \cdot \cancel{e^{-2x}})\,dx + c\right]$

$$\boxed{y = \frac{1}{e^{2x} \cdot x}\left[\frac{x^2}{2} + c\right]}$$

ö/ $(x^2+1)\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'} + \underbrace{4x}_{P(x)}\underbrace{y}_{y} = \underbrace{x}_{g(x)}$ $\quad y(2)=1$ başlangıç değer problemini çözün

Lineerlikten çözülür fakat Lineerlikten çözülme koşulunu pek sağlamıyor. Her tarafı $\frac{1}{x^2+1}$ ile çarp

$\Rightarrow \underbrace{y'}_{y'} + \overbrace{\frac{4x}{x^2+1}}^{P(x)}\overbrace{y}^{y} = \overbrace{\frac{x}{x^2+1}}^{Q(x)}$

$\lambda = e^{\int P(x)dx}$

$\lambda = e^{\int \left(\frac{4x}{x^2+1}\right)dx} \quad x^2+1=u \quad 2x\,dx = du$

$\lambda = e^{\int \frac{2du}{u}}$

$\lambda = e^{2 \cdot \ln|u|} = e^{2\ln|x^2+1|}$

$\lambda = (x^2+1)^{2\ln e} = (x^2+1)^2$

$y = \frac{1}{\lambda(x)}\left[\int (\lambda(x)\,Q(x))dx + c\right.$

$y = \frac{1}{(x^2+1)^2} \cdot \left[\int \left((x^2+1)^{\cancel{2}} \cdot \frac{x}{\cancel{(x^2+1)}}\,dx\right) + c\right.$

$y = \frac{1}{(x^2+1)^2}\left[\int (x^3+x)\,dx\right. \Rightarrow \frac{1}{(x^2+1)^2} \cdot \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]$ (2)

$$\boxed{y = \frac{1}{(x^2+1)^2} \cdot \frac{x^4+2x^2}{4} + c}$$

$x=2 \quad y=1$ için

$y = \frac{16+8}{4} \cdot \frac{1}{25} + c$

$1 = \frac{6}{25} + c$ $\qquad \boxed{c = \frac{19}{25}}$

$$\boxed{y = \frac{1}{(x^2+1)^2} \cdot \frac{x^4+2x^2}{4} + \frac{19}{25}}$$

(21)

Calısma Soruları

Ö/ $\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'} + \underbrace{2x}_{p(x)}\underbrace{y}_{y} = \underbrace{e^{x-x^2}}_{g(x)}$ $\quad y(\overset{x}{0}) = \overset{y}{-1}$ baslangıç değer problemini çözünüz

$$y = \frac{1}{\lambda(x)} \cdot \left[\int \lambda(x) \cdot g(x)\, dx + C\right]$$

Lineerlikten çözülebilir

$\lambda = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 2x}$

$\lambda = e^{x^2}$

$$y = \frac{1}{e^{x^2}} \left[\int \left(\cancel{e^{x^2}} \cdot e^x \cdot \frac{1}{\cancel{e^{x^2}}}\right) dx + C\right]$$

$\boxed{\star\ e^0 = 1}$

$$y = \frac{1}{e^{x^2}} \cdot \left[e^x + C\right]$$

$x = 0$ $y = -1$ için

$-1 = \frac{1}{1} + (0 \cdot C)$

$C = -2$

$$\boxed{y = \frac{1}{e^{x^2}}\left[e^x - 2\right]}$$

Ö/ $\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'} + \underbrace{2x}_{p(x)}\underbrace{y}_{y} = \underbrace{4x}_{g(x)}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$y = \frac{1}{\lambda(x)}\left[\int \lambda(x) \cdot g(x) dx + C\right]$$

$\lambda = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 2x}$

$\lambda = e^{x^2}$

$$y = \frac{1}{e^{x^2}}\left[\int e^{x^2} \cdot \underbrace{4x\, dx}_{2\,du} + C\right]$$

$x^2 = u$

$2x\,dx = du$

$$y = \frac{1}{e^{x^2}}\left[2 \cdot \int e^u \cdot du\right] \Rightarrow \boxed{\frac{1}{e^{x^2}} \cdot \left(2e^{x^2} + C\right)}$$

Ö/